Leçon 203 : Utilisation de la compacité

I / Rappels sur la compacité, premières applications

1| Définition

a| Dans un espace topologique

Soit X un espace topologique

Déf. 1 : Recouvrement
Soit $A \subset X$. On appelle recouvrement de A, une famille $(O_i)_{i\in I}$ de parties de X, telle que $A \subset \bigcup_{i\in I} O_i$

Déf. 2 : Compact
X est dit compact si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini. Cette propriété s'appelle la propriété de Borel - Lebesgue

Ex 3 : * Si X fini, X muni de la topologie discrète, est compact
* Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in X$, alors $\{x_n, n\in\mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est compact

b| Dans un espace métrique

Soit (X,d) un espace métrique

Déf 4 : Compact
(X,d) est dit compact si de toute suite de X on peut extraire une sous-suite convergente. Cette propriété s'appelle la propriété de Bolzano - Weierstraß

Th. 5 : (X,d) vérifie la propriété de Borel - Lebesgue ssi (X,d) vérifie la propriété de Bolzano - Weierstraß
Ainsi si (X,d) est un espace métrique, on a 2 définitions équivalentes de la compacité.

$\Rightarrow$ Dans la suite on ne considère que des espaces métriques

2| Propriétés. Soit (X,d) un espace métrique

Prop. 6 : Soit $A \subset X$
- Si A est compacte alors A est fermée et bornée
- Si X est compact et A fermée, alors A est compacte

Prop. 7 : Si (X,d) est compact alors (X,d) est complet

Prop. 8 : Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$. $[a,b]$ est compact dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ (on prend la distance qui dérive de la norme valeur absolue)

Prop. 9 : Soient $N\in\mathbb{N}^*$, $(X_i, d_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ des espaces métriques compacts. Soit $\delta(x,y) = \max_{i\in[\![1,N]\!]} d_i(x_i, y_i)$.
Alors $\left(\prod_{i=1}^N X_i, \delta\right)$ est compact

Conséquence 10 : Les compacts de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ sont les fermés et bornés.

(d)

3| Premières applications

Prop. 11 : Une suite dans un compact converge ssi elle admet une unique valeur d'adhérence

Contre-ex 12 : $\begin{cases} x_{2n} = 2n \\ x_{2n+1} = 0 \end{cases}$ $x_n \to +\infty$ et 0 est l'unique valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Appli. 13 : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle borné, $f : I \to I$ continue. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déf par $\begin{cases} x_0 \in I \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$ converge ssi $|x_{n+1} - x_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Th. 14 : Théorème de Heine
Une fonction continue sur un compact est uniformément continue.

Contre-ex 15 : $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ est continue mais pas uniformément continue

Appli. 16 : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et f a des limites finies en $\pm\infty$, alors f est uniformément continue. En particulier si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est à support compact, f est uniformément continue.

Appli. 17 : Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$
Alors $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,dt$

Ex. 18 : $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}$

a

II / Applications du théorème des bornes atteintes

Th. 19 : Soit $f : (X,d) \to (Y,\delta)$ une application continue entre 2 espaces métriques. Si (X,d) est compact alors $f(X)$ est une partie compacte de (Y,δ).

Cor. 20 : Théorème des bornes atteintes
Soit (X,d) compact, $f : (X,d) \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Contre-ex 21 : • $f : \begin{cases}]0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$ est continue et non bornée
• $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue bornée mais n'atteint pas ses bornes.

1| Applications en analyse réelle. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$

Th. 22 : Théorème de Rolle
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$, et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in]a,b[$, $f'(c) = 0$

Appli 23 : Si $P \in \mathbb{R}[X]$ a n racines réelles distinctes, alors P' a au moins $(n-1)$ racines réelles distinctes

Cor. 24 : Théorème des accroissements finis
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$.
Alors il existe $c \in]a,b[$, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(a)

(a) **Appli 25 : Variations des fonctions dérivables**
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$
- Si $\forall x \in]a,b[$, $f'(x) = 0$, alors f est constante
- Si $\forall x \in]a,b[$, $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante
- Si $\forall x \in]a,b[$, $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante

2| Application aux espaces vectoriels normés (evn) de dimension finie

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie

Th. 26 : Toutes les normes sur E sont équivalentes

Cor. 27 : Soit N une norme sur E, soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un $\mathbb{R}$-evn. Soit $f : E \to F$ linéaire. Alors f est continue.

Cor. 28 : Soit N une norme sur E, tout fermé borné de (E,N) est compact. En particulier, la boule unité fermée de (E,N) est compacte.

Ex. 29 : $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}),\ {}^tAA = I_n\}$ est compact.

Prop. 30 : Théorème de Riesz
L'implication du corollaire 28 est en fait une équivalence : Soit (E,N) un $\mathbb{R}$-evn.
Alors, la boule unité fermée de (E,N) est compacte ssi E est de dimension finie.
(La démonstration du sens direct n'utilise pas le th. des bornes atteintes)

3| Applications en algèbre

(e) **Th. 32 : Théorème de D'Alembert-Gauss**
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, non constant. Alors P admet au moins une racine.

Th. 33 : Théorème spectral
Soit $(E, \langle\cdot\rangle)$ un espace euclidien, Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\langle u(x)|y\rangle = \langle x | u(y)\rangle$ pour tous $(x,y) \in E^2$. Alors u admet un vecteur propre. On en déduit que u est diagonalisable dans une base orthonormée.

4| Autres applications

(c) **Th. 34 : Théorèmes de point fixe**
Soit (E,N) un evn, K un compact de E, $f : K \to K$,
i) Si $\forall (x,y) \in K^2$, $x \neq y$, $N(f(x) - f(y)) < N(x-y)$ alors f admet un unique point fixe
ii) Si K est de plus étoilé et $\forall (x,y) \in K^2$, $N(f(x) - f(y)) \leq N(x-y)$, alors f admet un point fixe

Contre-ex 35 : i) $f : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(e^x + 1) \end{vmatrix}$ n'a aucun point fixe

Soit (X,d) un espace métrique compact. On note $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ l'ev des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$. Muni de $\|\cdot\|_\infty$ déf. par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$, c'est un evn

On note de manière analogue, $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$

(b) **Th. 36 : Théorème de Dini** - Soit (X,d) compact. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f \in \mathcal{C}(X)$, alors elle converge uniformément vers f.

Ex 37 : Pour $n \geq 1$, Soit $f_n : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (1+\frac{x}{n})^n \end{vmatrix}$
Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction exponentielle, sur $[0,1]$

III / Espace des fonctions continues sur un compact

1| Compacité
Soit (X,d) compact. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$

Déf. 38 : Équicontinuité
On dit que $\mathcal{A}$ est équicontinue en un point $x_0 \in X$ si
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, d(x,x_0) < \delta \Rightarrow \forall f \in \mathcal{A}, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Ex 39 : + Si $\mathcal{A}$ est finie, $\mathcal{A}$ est équicontinue en tout point de X
+ Si $k > 0$, l'ensemble des fonctions k-lipschitziennes de X dans $\mathbb{C}$, est équicontinu.

(e) **Déf. 40 :** Soit (Y,δ) espace métrique. On dit que $A \subset Y$ est relativement compact, si de toute suite de A on peut extraire une sous-suite qui converge dans Y

Lemme 41 : Un compact contient un ensemble dense et dénombrable

Th. 42 : Théorème d'Ascoli
Si X est compact, alors si $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ est équicontinue et bornée, alors $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$.

(c) **Appli. 43 : Théorème de Montel** $\boxed{\text{DVP 1}}$
Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $\mathcal{A} \subset H(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes sur Ω.
Alors si $\mathcal{A}$ est bornée sur tout compact, i.e. pour tout $K \subset \Omega$ compact, il existe $M_K > 0$ telle que pour toute $f \in \mathcal{A}$, $\|f\|_{\infty,K} := \sup_{z \in K} |f(z)| \leq M$,
alors de toute suite de $\mathcal{A}$ il existe une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de Ω

2| Densité

Th, 44 : Théorème de Weierstraß $\boxed{DVP2}$

(a) soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, Alors il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}[X])^{\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f

Th, 45 : Généralisation : théorème de Stone-Weierstraß

(c) soit (X,d) compact, soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ telle que $\forall (x,y) \in X^2, x \neq y, \exists f \in \mathcal{A}, f(x) \neq f(y)$, et qui contient les fonctions constantes, Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ (Admis)

Appli, 46 : Si X est un compact de $\mathbb{R}^d$, et soit : $\mathcal{A} = \{x \mapsto P(x),\ P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]\}$, Alors, $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$

Références :

(a) Gourdon, Analyse

(b) Hirsch, Eléments d'analyse fonctionnelle

(c) Bernis, Analyse pour l'agrégation

(d) Dreveton, Leçons pour l'agrégation de mathématiques

(e) Gozard, Théorie de Galois